SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

SULL'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI CERTE INCLUSIONI DIFFERENZIALI IN UNO SPAZIO DI BANACH SEPARABILE

BOLOGNA, 9-16 MAGGIO 1985, ore 17

INTRODUZIONE

Vogliamo esporre alcuni risultati su esistenza e struttura delle soluzioni del problema

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \quad , \quad x(o) = x_0 .$$

Salvo avviso contrario, supporremo costantemente che F verifichi almeno le seguenti condizioni:

(H_1) $[0,T] \times A \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset$ compatto $\subset g(t)B \subset E$,

dove E è uno spazio di Banach *separabile* reale con norma $|\cdot|$ e sfera unità $B = \{x \in E | \; |x| \leq 1\}$, g è una funzione sommabile non negativa e $A = K + aB$ con K compatto in E e $a \geq \int_0^T g(t)dt$;

(H_2) $F(\cdot,x)$ è misurabile per ogni $x \in A$ (in Appendice sono riportate alcune definizioni equivalenti di misurabilità);

(H_3) per ogni $C \subset A$ si ha

$$h[F(t,C)] \leq \omega(t,h(C)) \qquad \text{q.d.},$$

dove h(C) indica la *misura di non compattezza* dell'insieme C secondo Hausdorff e ω è una *funzione di Kamke*, ossia

$$[0,T] \times [0,+\infty[\ni (t,r) \to \omega(t,r) \in [0,+\infty[,$$

$\omega(t,0) = 0$, $\omega(t,\cdot)$ è continua per quasi ogni t, $\omega(\cdot,r)$ è misurabile

per ogni r, per ogni $k > 0$ esiste g_k sommabile tale che $\omega(t,r) \leqq g_k(t)$ per $0 \leqq r \leqq k$, l'unica funzione assolutamente continua $f: [0,T] \to [0, +\infty[$ che verifica la condizione

$$f(t') \leqq \int_t^{t'} \omega(s,f(s)) \quad +f(t) \text{ per } 0 \leqq t \leqq t' \leqq T, \quad f(o) = 0$$

è data da $f(t) = 0$ per $0 \leqq t \leqq T$.

La funzione ω definita da $\omega(t,r) = g(t)r$ con $g \geqq 0$ sommabile è un esempio di funzione di Kamke.

Una condizione sufficiente su F per la validità della condizione (H_3) è la seguente

(H_3') $\qquad F(t,x) \subset F(t,y) + \omega(t,|x-y|)B$

per ogni $x,y \in A$ e per quasi ogni $t \in [0,T]$, dove la funzione di Kamke ω è anche crescente rispetto al secondo argomento r.

1. F A VALORI CONVESSI

Supponiamo che F verifichi le condizioni (H_1), (H_2), (H_3) e inoltre supponiamo

$$F(t,x) = \text{convesso} \quad \text{per ogni } t \text{ e } x$$

e $F(t,\cdot)$ semicontinua superiormente (u.s.c.) per quasi ogni t, ossia tale che

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x' \in A: |x-x'|\leqq\delta \Rightarrow F(x') \subset F(x) + \varepsilon B$$

Teorema 1. Sotto le condizioni precedenti per la funzione F, si ha

i) per ogni $x_o \in K$ esiste una funzione assolutamente continua $x: [0,T] \to A$ derivabile q.d. e tale che

$$x(o) = x_o \ , \ \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{q.d.} \ ;$$

ii) detto $T_F(x_o)$ l'insieme delle funzioni $x(\cdot)$ che verificano la condizione i), $T_F(x_o)$ è compatto in $C([0,T]), E)$;

iii) la funzione $K \ni x_o \to T_F(x_o)$ è u.s.c..

Osservazione. Nel corso della dimostrazione l'ipotesi (H_2) serve esclusivamente per assicurare la validità della seguente condizione:

(H_2') per ogni $x \in A$ esiste una selezione misurabile

$$[0,T] \ni \to f(t,x) \in F(t,x).$$

Questo teorema è enunciato come osservazione finale nel lavoro [8] di Kisielewicz, che considera il caso in cui $F(t,\cdot)$ è continua, rifacendosi a precedenti risultati di Tolstonogov [11].

Il teorema 1 è stato dimostrato da Davy [4] nel caso in cui E ha dimensione finita.

Per la dimostrazione seguiamo il metodo di Davy [4], utilizzando inoltre i risultati di Monch-von Harten [10] sulle equazioni dif-

ferenziali ordinarie negli spazi di Banach, in particolare un loro risultato fondamentale sulla misura di non compattezza. Tolstonogov [12] ha dimostrato un risultato analogo al Teorema 1 con la condizione (H_3) sostituita con una condizione un po' diversa (cfr. n. 2).

La dimostrazione del Teorema 1 si fonda sulle proposizioni che seguono.

Proposizione 1. Sia E uno spazio di Banach separabile, sia

$$M \ni t \to F(t) \neq \emptyset \text{ chiuso} \subset g(t)B \subset E$$

con $0 \leq g \in L^1(M)$ e F misurabile. Allora la funzione $t \to h(F(t))$ è misurabile e si ha

$$h\left(\int_M F(t)dm\right) \leq \int_M h(F(t))dm.$$

Questa proposizione ha la sua origine in [10], dove è considerato il caso in cui M è un intervallo [a,b] in R con la misura di Lebesgue, nel quale è data una successione di funzioni continue f_n tali che $|f_n(t)| \leq g(t)$ per $n \geq 1$. In [10] è provata la formula

$$h(\{\int_a^b f_n(t)dt|\geq 1\}) \leq \int_a^b h(\{f_n(t)|n \geq 1\})dt.$$

Successivamente Kisiehewicz [9] ha provato che questa formula vale ancora se le f_n sono misurabili e se si sostituisce [a, b] con un suo sottoinsieme misurabile.

Questa formula segue dalla Proposizione 1 con

$$F(t) = \{f_n(t)|n \geq 1\}$$

Per la dimostrazione della Proposizione 1 useremo i seguenti lemmi.

Lemma 1. Sia $N \ni n \to E_n \subset E_{n+1} \subset E$ una successione di sottospazi vettoriali di E tale che

$$\dim E_n < \infty \quad , \quad E = \overline{\bigcup_1^\infty E_n}$$

e sia $C \subset E$, C limitato. Allora si ha

$$h(C) = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in C} \rho(x,E_k).$$

Questo risultato è contenuto nella Proposizione 2 di [10].

Lemma 2. Sia E uno spazio normato reale e F un suo sottospazio vettoriale. Detto $F°$ il sottospazio di E^* (= duale di E) dei funzionali nulli su F, si ha per ogni $x \in E$

$$\rho(x,F) = \max\{\langle x,x'\rangle \mid x' \in F°, \ |x'| \leq 1\}.$$

Per la dimostrazione si veda, per esempio, Groetsch [7], Theorem 2.8.2.

Per provare la Proposizione 1, cominciamo a provare che la funzione $t \to h(F(t))$ è misurabile. Dal Lemma 1 si ha

$$h(F(t)) = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in F(t)} \rho(x,E_k).$$

Siccome F è misurabile, esiste una successione di funzioni misurabili f_m tali che

$$F(t) = \overline{\{f_m(t) \mid m \geq 1\}} \qquad \text{per } t \in M,$$

e quindi si ha

$$h(F(t)) = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq 1} \rho(f_n(t), E_k)$$

e di qui segue la misurabilità.

Sin ora $x \in \int_M F(t)dm$. Allora esiste la funzione misurabile $t \to f(t) \in F(t)$ tale che

$$x = \int_M f(t)dm$$

e quindi si ha per ogni $x' \in S_k = \{x' \in E^* | x' \in E_k^o, |x'| \leq 1\}$, dal Lemma 2,

$$\langle x,x'\rangle = \int_M \langle f(t), x'\rangle dm \leq \int_M \sup_{\substack{x\in F(t)\\ x'\in S_k}} \langle x,x'\rangle dm =$$

$$= \int_M \sup_{x\in F(t)} \rho(x,E_k)dt$$

e quindi, posto $I = \int_M F(t)dm$,

$$\sup_{x\in I} \rho(x,E_k) = \sup_{\substack{x\in I\\ x'\in S_k}} \langle x,x'\rangle \leq \int_M \sup_{x\in F(t)} \rho(x,E_x)dt.$$

Siccome l'integrando è maggiorato da $g(t)$, possiamo passare al limite per $k \to \infty$ e ottenere la formula cercata.

Proposizione 2. Sia (M, dm) uno spazio misurato σ-finito e completo, sia E uno spazio di Banach separabile e sia

$$M \ni t \to F(t) \neq \emptyset \text{ compatto convesso} \subset E,$$

$$F(t) \subset g(t)B \quad , 0 \leq g \in L^1(M),$$

F misurabile. Allora l'insieme

$$S_F = \{M \ni t \to f(t) \in F(t) | f \text{ misurabile}\} \subset L^1(M,E)$$

è compatto $\neq \emptyset$ rispetto alla minima topologia che rende continue le funzioni

$$S_F \ni f \to \int_M \langle f(t), x' \rangle \phi(t) dm \quad , \quad x' \in E^*, \ \phi \in L^\infty(M)$$

e l'insieme

$$\int_M F(t)dt \overset{def}{=} \{\int_M f(t)dt | f \in S_F\} \neq \emptyset$$

è convesso e compatto in E.

Per la dimostrazione si veda Castaing-Valadier [2], Theorem V-13, Remark (pag. 147) e Theorem V-15 (pag. 148).

Proposizione 3. Sia U uno spazio topologico, sia E uno spazio di Banach separabile e sia

$$[0,T] \times U \ni (t,x) \to F(t;x) \neq \emptyset \text{ compatto convesso} \subset E,$$

con $F(t,\cdot)$ u.s.c. per quasi ogni t.

Siano date le funzioni

$$u_n, \ u : [0,T] \to U \quad , \quad n \in N,$$

tali che

$$u_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} u(t) \qquad \text{q.d.},$$

e siano date le funzioni

$$v_n,\ v : [0,T] \longrightarrow E$$

tali che $\langle v_n, x'\rangle$, $\langle v, x'\rangle \in L^1([0,T])$ per ogni $x' \in E^*$ e, per ogni $x' \in E^*$, $\langle v, x'\rangle$ è *punto aderente* della successione $\langle v_n, x'\rangle$ secondo la topologia debole indotta da L^∞ su L^1. Se si ha

$$v_u(t) \in F(t, u_n(t)) \qquad \text{q.d.} \quad ,$$

allora si ha anche

$$v(t) \in F(t, u(t) \qquad \text{q.d.} \quad .$$

Per la dimostrazione si veda Castaing-Valadier [2], Theorem VI-4 (pag. 170).

Dimostrazione del teorema. Per ogni $n \in N$, le formule (cfr. Davy [4])

$$\begin{cases} f_n(t) \in F(t, x_0) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{T}{n} \\ x_n(t) = x_0 + \int_0^t f_n(s)\, ds & \text{"} \end{cases} \quad ,$$

$$\begin{cases} f_n(t) \in F(t, x_n(k\frac{T}{n})) & \text{per } k\frac{T}{n} \leq t \leq (k+1)\frac{T}{n} \\ & \qquad (1 \leq k < n) \\ x_n(t) = x_n(k\frac{T}{n}) + \int_{k\frac{T}{n}}^{t} f_x(s)ds & \quad " \end{cases}$$

definiscono (induzione su k) una funzione *misurabile* $f_n : [0,T] \to E$, se scegliamo su ciascun intervallo $[k\frac{T}{n}, (k+1)\frac{T}{n}]$ come f_n una selezione misurabile della funzione misurabile $t \to F(t, x_n(k\frac{T}{n}))$, e una funzione $x_n : [0,T] \to A$ derivabile q.d..

Poniamo

$$y_n(t) = x_n(k\frac{T}{n}) \text{ per } k\frac{T}{n} \leq t \leq (k+1)\frac{T}{n},$$

$$0 \leq k < n,$$

Allora si ha

(i) $\dot{x}_n(t) = f_n(t) \in F(t, y_n(t))$ q.d. ,

(ii) $|\dot{x}_n(t)| \leq g(t)$ "

(iii) $|x_n(t') - x_n(t)| \leq \int_t^{t'} g(s)ds$ per $0 \leq t \leq t' \leq 1$,

(iv) $|x_n(t) - y_n(t)| \leq \int_{k\frac{T}{n}}^{(k+1)\frac{T}{n}} g(s)ds$ per $k\frac{T}{n} \leq t \leq (k_{+1})\frac{T}{n}$

Di qui segue che la successione $n \to x_n(\cdot)$ è equicontinua su [0,T] e che

$$x_n(t) - y_n(t) = z_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{unif. su } [0,T].$$

Si ha quindi

$$h(\{x_n(t) | n \geq 1\}) = h(\{y_n(t) | n \geq 1\}) = h(t)$$

e inoltre, dalla formula

$$x_n(t') = x_n(t) + \int_{t'}^{t} f_n(s)ds$$

e dalla Proposizione 1, con $F(t) = \overline{\{f_n(t) | n \geq 1\}}$, $t < t'$,

$$h(t') \leq h(t) + h(\{\int_t^{t'} f_n(s)ds | n \geq 1\}) \leq h(t) + h\,(\int_t^{t'} F(s)ds) \leq$$

$$\leq \int_{t'}^{t'} h(F(s))ds + h(t) = \int_t^{t'} h(\{f_n(s) | n \geq 1\}ds + h(t) \leq$$

$$\leq \int_t^{t'} h(F(s,\{y_n(s) | n \geq 1\}))\, ds + h(t) \leq$$

$$\leq \int_t^{t'} \omega(s,h(\{y_n(s) | n \geq 1\}))\, ds + h(t) =$$

$$= \int_t^{t'} \omega(s,h(\{x_n(s) n \geq 1\}))ds + h(t).$$

Se $0 \leq t < t' \leq T$ si ha, a causa della maggiorazione (iii),

$$h(t') \leq h(t) + \int_t^{t'} g(s)ds$$

e quindi anche

$$|h(t') - h(t)| \leq \int_t^{t'} g(s)ds$$

dunque $h(\cdot)$ è una funzione assolutamente continua tale che

$$0 \leq h(t') \leq \int_t^{t'} \omega(s, h(s))\, ds + h(t)$$

e ciò implica $h(t) = 0$ per $0 \leq t \leq T$. Ma allora $\{x_n(t) | n \geq 1\}$ è relativamente compatto in E e quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, $\{x_n(\cdot) | n \geq 1\}$ è relativamente compatta in $C([0,T], E)$. Pertanto esiste una sottosuccessione (che continuiamo a indicare con $x_n(\cdot)$) tale che

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} x(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T.$$

Si ha anche, per quasi ogni t, da (i)

$$h(\{\dot{x}_n(t) | n \geq 1\}) \leq h(F(t, \{y_n(t) | n \geq 1\})) \leq$$

$$\leq \omega(t, h(\{y_n(t) | n \geq 1\})) = \omega(t,0) = 0,$$

poiché $y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$.

Dunque anche $\{\dot{x}_n(t) | n \geq 1\}$ è relativamente compatto in E e quindi

$$F_1(t) = \overline{\mathrm{conv}(\{\dot{x}_n(t) | u \geqq 1\})} = \text{compatto convesso} \subset g(t)B \subset E$$

Si ha poi per ogni $x' \in E^*$(= duale reale di E)

$$t \to \sup\{\langle y,y'\rangle | y \in F_1(t)\} =$$

$$= \sup\{\langle \dot{x}_n(t), y'\rangle | n \geqq 1\} = \text{funzione misurabile}$$

e quindi F_1 è misurabile (cfr. Cartaing-Valadier [2], Theorem III-15 (pag. 70)).

Ora possiamo applicare la Proposizione 2 alla funzione F_1. Siccome $\dot{x}_n(\cdot) \in S_{F_1}$, questa successione è aderente a una funzione $v(\cdot) \in S_{F_1}$ secondo la topologia considerata. Allora si ha per ogni $y' \in E^*$

$$\langle x_n(t) - x_0, y'\rangle = \int_0^t \langle \dot{x}_n(s), y'\rangle ds$$

e il primo membro converge a $\langle x(t) - x_0, y'\rangle$, mentre il secondo è aderente a

$$\int_0^t \langle v(s), y'\rangle\, ds,$$

dunque deve essere

$$\langle x(t)-x_0, y'\rangle = \int_0^t \langle v(s), y'\rangle ds$$

e quindi

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(s)ds \qquad \text{per } 0 \leqq t \leqq T.$$

Resta da provare che $v(t) \in F(t,x(t))$ per quasi ogni t. Per questo basta applicare la Proposizione 3 con $u_n = y_n$, $u = x$, $v_n = \dot{x}_n$. Con questo resta provato che $x(\cdot)$ è una soluzione

Proviamo ora che $T_F(K)$ è compatto in $C([0,T], E)$ e allora con $K = \{x_o\}$ si otterrà la affermazione ii).

Sia $x_n(\cdot) \in T_F(K)$. Allora si ha

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, x_n(t)) \qquad \text{q.d.},$$

$$x_n(o) \in K$$

e quindi

$$|\dot{x}_n(t)| \leq g(t),$$

$$|x_n(t') - x_n(t)| \leq \int_t^{t'} g(s)ds \qquad \text{per } 0 \leq t \leq t' \leq T.$$

Ora si possono ripetere le considerazioni fatte sopra, con $y_n(t) = x_n(t)$, per ottenere una sottosuccessione (ancora indicata con $x_n(\cdot)$)

$$x_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(t) \qquad \text{unif. per } 0 \leq t \leq T,$$

e una funzione $v(\cdot) \in L^1([0,T], E)$ tale che

$$x(t) - x_o = \int_0^t v(s)ds,$$

$$v(t) \in F(t,x(t)) \qquad \text{q.d.}$$

e questo prova che $x(\cdot) \in T_F(K)$.

Infine, per provare iii) è sufficiente provare che l'applicazione

$$K \ni x \longrightarrow T_F(x) \in T_F(K) = \text{compatto}$$

ha il grafico chiuso (cfr. Aubin-Cellina [1], Corollary 1 (pag. 42)).

Sia

$$x_n(\cdot) \in T_F(x_n) \quad , \quad x_n \in K,$$

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \in K,$$

$$x_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(t) \quad \text{unif. per } 0 \leq t \leq T.$$

Allora si ha

$$x_n(0) = x_n \, ,$$

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, x_n(t)) \qquad \text{q.d.}$$

e quindi, ragionando come sopra, si trova una funzione $v(\cdot) \in L^1([0,T], E)$ tale che

$$x(t) - x = \int_0^t v(s)ds,$$

$$v(t) \in F(t, x(t)) \qquad \text{q.d.}$$

e ciò prova che $x(\cdot) \in T_F(x)$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema.

Teorema 2. Nelle stesse ipotesi del Teorema 1, l'insieme $T_F(x_0)$ è connesso per ogni $x_0 \in K$.

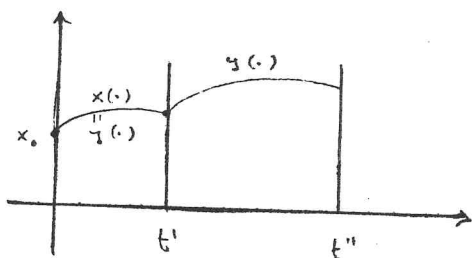
Un risultato analogo è provato in [12] da Tolstonogov.

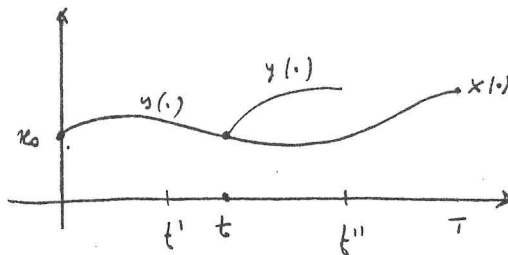
La dimostrazione si basa sulla costruzione di una funzione ausiliaria e sulle proposizioni che seguono, dovute a Davy [4] nel caso di $\dim(E) < \infty$.

Sia $0 \leq t' < t'' \leq T$ e $x_0 \in K$. Poniamo

$V([0,t']) = \{x \quad C([0,t'], E)\ x(\cdot)$ assolutamente continua, esiste $\dot{x}(t) \in g(t)B$ q.d., $x(o) = x_0\}$

Allora si ha $x(t) \in A$ per ogni $x \in V([0,t'])$ e $0 \leq t \leq t'$.

Definiamo gli operatori $P_{t'}^{t''}$, $Q_{t'}^{t''}$ mediante le formule seguenti

$$V([0,t']) \ni x \longrightarrow P_{t'}^{t''}(x) =$$

$$= \{y \in V([0,t''])\,|\,y(t) = x(t) \text{ per } 0 \leq t \leq t',\ \dot{y}(t) \in F(t,x(t')) \text{ q.d. per } t' \leq t \leq t''\},$$

$$[t',t''] \times V([0,T]) \ni (t,x) \longrightarrow Q_{t'}^{t''}(t,x) =$$

$$= \{y \in V([0,t''])\,|\,y(s)=x(s) \text{ per } 0\leq s\leq t,\ \dot y(s) \in F(s,x(t')) \text{ q.d. per } t\leq s\leq t''\}.$$

Per ogni $n \in N$, poniamo $t_i = i\,\frac{T}{n}$ per $0\leq i\leq n$ e definiamo $P(t,x)$ mediante la formula

$$[0,T]\times V([0,T]) \ni (t,x) \longrightarrow P(t,x) =$$

$$= (P_{t_{n-1}}^{t_n} \circ \ldots \circ P_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \circ Q_{t_i}^{t_{i+1}})(t,x) \quad \text{se } t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Siccome riesce

$$Q_{t_i}^{t_{i+1}}(t_i,x) = P_{t_i}^{t_{i+1}}(x|_{[0,t_i]}) ,$$

$$Q_{t_i}^{t_{i+1}}(t_{i+1},x) = \{x|_{[0,t_{i+1}]}\},$$

la definizione è ben posta.

<u>Proposizione 4.</u> L'applicazione $x \to P_{t'}^{t''}(x)$ definita sopra ha valori non vuoti convessi e compatti ed è u.s.c..

Dal Teorema 1, applicato all'intervallo [t',t"] e alla funzione $t \to F(t,x(t'))$, segue che $P_{t'}^{t"}(x) \neq \emptyset$ ed è chiaro che è un insieme convesso.

Si completa la dimostrazione procedendo come per il Teorema 1: prima si prova che $P_{t'}^{t"}$(compatto) = compatto e poi che $P_{t'}^{t"}$ ha il grafico chiuso.

Proposizione 5. L'applicazione $t \to Q_{t'}^{t"}(t,x)$ definita sopra ha valori non vuoti compatti e convessi ed è u.s.c. L'applicazione $t \to P(t,x)$ ha valori non vuoti compatti e connessi ed è u.s.c.

Dal Teorema 1, applicato all'intervallo [t,t"] e alla funzione $s \to F(s,x(t'))$, segue che $Q_{t'}^{t"}(t,x) \neq \emptyset$ ed è chiaro che tale insieme è convesso.

Proviamo che $Q_{t'}^{t"}([t',t"],x)$ è compatto in $C([0,t"],A)$.

Sia

$$x_n \in Q_{t'}^{t"}(t_n,x) \quad , \quad t' \leq t_n \leq t".$$

Possiamo supporre (eventualmente per una sottosuccessione)

$$t_n \longrightarrow t_o \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

Si ha

$$x_n(t) = x(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq t_n ,$$

$$\dot{x}_n(t) \in F(t,x(t')) \text{ per } t_n \leq t \leq t" \quad , \quad \text{q.d.},$$

e di qui segue $|\dot{x}_n(t)| \leq g(t)$ e quindi la equicontinuità della successio

ne delle $x_n(\cdot)$. Poniamo

$$G(t) = \{\dot{x}(t)\} \text{ per } 0 \leq t \leq t_n, \text{ (q.d.)}$$

$$G(t) = F(t, x(t')) \text{ per } t_n \leq t \leq t''.$$

Allora si ha $\dot{x}_n(t) \in G(t)$ q.d. per $0 \leq t \leq t''$ e la funzione $t \to G(t)$ è misurabile e ha valori compatti convessi e non vuoti.Quindi si ha

$$h(\{x_n(t) | n \geq 1\}) \leq \int_0^t h(G(s))ds = 0 \qquad \text{per } 0 \leq t \leq t''$$

e, per il Teorema di Ascali-Arzelà, la successione delle $x_n(\cdot)$ è relativamente compatta in $C([0,t''], A)$ ed ha una sottosuccessione (che indichiamo allo stesso modo) uniformemente convergente a $y \in C([0,t''], A)$. Inoltre possiamo applicare a G le proposizioni 2 e 3 e ottenere una funzione v sommabile su $[0,t'']$ tale che

$$y(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds \qquad \text{per } 0 \leq t \leq t'',$$

$$v(t) \in G(t) \qquad \text{q.d. per } 0 \leq t \leq t''.$$

Se $t < t_0$, si ha $t < t_n$ per n abbastanza grande e quindi $x_n(t) = x(t)$ e $y(t) = x(t)$. Siccome y e x sono continue, si ha

$$y(t) = x(t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Se $t > t_0$ si ha $t > t_n$ per n abbastanza grande e quindi $G(t) = F(t,x(t'))$. Dunque si ha $v(s) \in F(s,x(t'))$ q.d. per $t_0 < s \leq t''$ e questo prova che $y \in Q_{t'}^{t''}(t_0,x)$. In modo analogo si prova che la funzione $t \to Q_{t'}^{t''}(t,x)$ ha grafico chiuso e di qui segue che è u.s.c.

Le proprietà indicate per la funzione $t \to P(t,x)$ sono vere, perché questa è funzione composta di funzioni che possiedono le stesse proprietà.

Dimostrazione del Teorema 2. Se $T_F(x_o)$ non è connesso, esistono due suoi sottoinsiemi chiusi H_i tali che

$$T_F(x_o) = H_1 \cup H_2 \ , \ H_1 \cap H_2 = \emptyset \quad , \quad H_i \ni x_i \ ,$$

per qualche x_i. Siccome H_1 e H_2 sono compatti in $C([0,T], A)$, esistono due aperti O_1 e O_2 in $C([0,T], A)$ tali che

$$H_i \subset O_i \quad , \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Ora si ha

$$C_i = P([0,T], x_i) = \text{connesso compatto},$$

$$C_i \supset P(T,x_i) = \{x_i\},$$

$$C_i \supset P(0,x_i) = P(o,x_o) \neq \emptyset$$

e quindi $C_1 \cup C_2$ è connesso in $C([0,T], A)$ e non può essere contenuto in $O_1 \cup O_2$. Dunque per ogni $n \in N$ esiste

$$y_n \in C_1 \cup C_2 \setminus (O_1 \cup O_2).$$

Possiamo supporre $y_n \in C_1$ e allora si ha

$y_n \in P(r_n, x_1)$, $0 \leq r_n \leq T$,

$y_n(t) = x_1(t)$ per $0 \leq t \leq r_n \in [t_i, t_{i+1}]$,

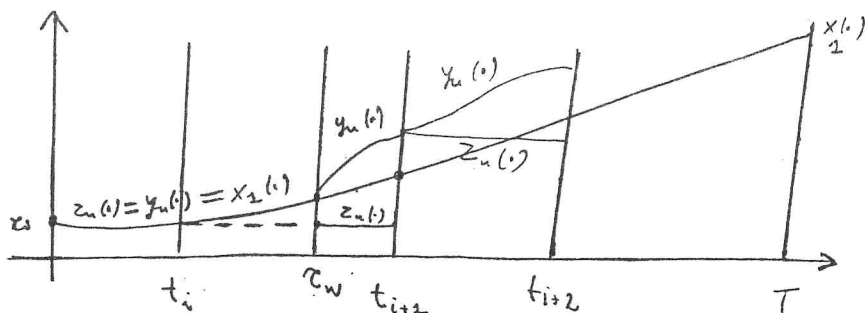
$\dot{y}_n(t) \in F(t, y_n(t_i))$ per $r_n \leq t \leq t_{i+1}$, q.d.,

$\dot{y}_n(t) \in F(t, y_n(t_j))$ per $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $j > i$, q.d.

Posto

$z_n(t) = x_1(t) = y_n(t)$ per $0 \leq t \leq r_n \in [t_i, t_{i+1}]$,

$z_n(t) = x_1(t_i)$ per $r_n \leq t \leq t_{i+1}$,

$z_n(t) = y_n(t_j)$ per $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $j > i$,

si ha $\dot{y}_n(t) \in F(t, z_n(t))$ q.d. per $0 \leq t \leq T$ e

$$|y_n(t) - z_n(t)| \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\dot{y}_n(s)|ds \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s)ds \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} 0.$$

Ora si può procedere come nella dimostrazione del Teorema 1 e concludere che (eventualmente per una sottosuccessione)

$$\dot{y}_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} y(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds \qquad \text{per } 0 \leq t \leq T,$$

$$v(t) \in F(t,y(t)) \quad \text{q.d.} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T.$$

Dunque $y \in T_F(x_0) \subset 0_1 \cup 0_2$. D'altra parte si ha anche $y_n \in C([0,T],A) \setminus (0_1 \cup 0_2)$ = chiuso e quindi anche y deve appartenere allo stesso insieme. Questa contraddizione prova che $T_F(x_0)$ deve essere connesso.

2. CASO NON CONVESSO

Tolstonogov [11] ha provato che esiste una soluzione per il problema considerato nell'Introduzione se le ipotesi del Teorema 1 vengono così modificate:

i) $F(t,\cdot)$ è continua per quasi ogni $t \in [0,T]$;

ii) $F(\cdot,x)$ è misurabile per ogni $x \in A$;

iii) $F(t,x) \neq \emptyset$ compatto per ogni t e x;

iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $H_\varepsilon \subset [0,T]$ tale che $\mu([0,T] \setminus H_\varepsilon) < \varepsilon$ e

(H_3'') $$\lim_{r\to 0+} h(F[(]t-r,\ t+r[\cap H_\varepsilon) x C]) \leq \omega(t,h(C))$$

per ogni $C \subset A$ e quasi ogni $t \in H_\varepsilon$.

Vogliamo provare che la stessa tecnica di Tolstonogov [11] può essere modificata in modo da permettere di sostituire la condizione iv) con la condizione (H_3). Questo caso è già stato trattato, con metodi diversi, da Kisielewicz [8].

Teorema 3. Se le ipotesi del Teorema 1 vengono così modificate:

i) $F(t,\cdot)$ è continua per ogni $t \in [0,T]$;

ii) $F(t,x) \neq \emptyset$ compatto per ogni t e x;

allora per ogni $x_0 \in K$ esiste una soluzione del problema

$$x(o) = 0, \quad \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{q.d. su } [0,T].$$

La dimostrazione si basa sulle proposizioni che seguono.

Proposizione 6. Sia $C([0,T], E) \supset H$ compatto tale che $u(t) \in A$ per ogni $u \in H$ e $0 \leq t \leq T$ e sia

$$v: [0,T] \longrightarrow E \quad \text{misurabile.}$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f \in C(H, L^1([0,T], E))$ tale che riesca per ogni $u \in H$

$$f(u)(t) \in F(t,u(t)) \quad \text{q.d.,}$$

$$\big|\,|v(t)-f(u)(t)| - \rho(v(t), F(t,u(t)))\big| \leq \varepsilon \quad \text{q.d.}$$

Questa è un'estensione di risultati precedenti di Antosiewicz-Cellina, che trattano il caso di $E = R^n$, e la dimostrazione si trova in Tolstonogov-Ciugunov [13].

Proposizione 7. Sotto le ipotesi del Teorema 3, poniamo per ogni $C \in \text{comp}(A) = \{C \subset A | C \neq \emptyset,\ C \text{ compatto}\}$ e per ogni t(*)

$$G(t,C) = \overline{\text{co}(\bigcup_{x \in C} F(t,x))}$$

e introduciamo su comp(A) la distanza di Handorff h. Allora si ha $G(t,C) \in \text{comp}(A)$ e inoltre

i) $G(t,\cdot)$ è continua su comp(A) per quasi ogni t;

ii) $G(\cdot,C)$ è misurabile per ogni C;

iii) se la funzione $t \to C(t)$ comp(A) è misurabile, allora è misurabile la funzione $[0,T] \ni t \to G(t,C(t))$

Questa proposizione è contenuta in [11]. La compattezza di $G(t,C)$ segue dal fatto che $F(t,C) = \bigcup_{x \in C} F(t,x)$ è compatto, a causa della continuità di $F(t,\cdot)$.

Proviamo i). Poniamo temporaneamente $F(x) = F(t,x)$. Proviamo che

$$\forall C_0 \in \text{comp}(A), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in C_0, \forall x' \in A:$$

$$|x-x'| \leq \delta \Rightarrow h[F(x), F(x')] \leq \varepsilon$$

Infatti, in caso contrario esistono $C_0 \in \text{comp}(A)$, $\varepsilon \geq o$ e due successioni $x_n \in C_0$ e $x'_n \in A$ tali che

(*) co(C) = involucro convesso di C.

$$|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{n} \quad , \quad h[F(x_n),\ F(x'_n)] > \varepsilon.$$

Ma, per la compattezza di C_0, si può supporre $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in C_0$ e quindi si ha $x'_n \longrightarrow x_0$ e

$$\varepsilon < h(F(x_n),\ F(x'_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(F(x_0),\ F(x_0)) = 0$$

e ciò è assurdo.

Poniamo $G(C) = G(t,C)$ e proviamo la continuità in C_0. Se ε e δ sono determinati come sopra, proviamo che si ha

$$h(C,C_0)<\delta \Rightarrow h[G(C),\ G(C_0)] \leq \varepsilon.$$

Infatti per ogni $x_0 \in C_0$ esiste $x \in C$ tale che $|x-x_0|<\delta$ e quindi $h[F(x),\ F(x_0)] \leq \varepsilon$. Dunque si ha

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B \subset \bigcup_{x\in C} F(x) + \varepsilon B \subset G(C)) + \varepsilon B = \text{convesso chiuso} \Rightarrow$$

$$G(C_0) \subset G(C) + \varepsilon B$$

In modo analogo si prova che

$$G(C) \subset G(C_0) + \varepsilon B$$

e quindi che $h(G(C),\ G(C_0)) \leq \varepsilon$.

Per provare ii) basta provare che è misurabile la funzione

$$t \to \sup\{\langle y,y'\rangle \mid y \in G(t,C)\} = \phi(t)$$

per ogni $y' \in E^*$. Ora si ha

$$\phi(t) = \sup\{\langle y,y'\rangle \mid y \in \bigcup_{x\in G} F(t,x)\} =$$

$$= \sup_{x\in C} \sup\{\langle y,y'\rangle \mid y\in F(t,x)\}$$

e la funzione ψ definita da

$$\psi(t,x) = \sup\{\langle y,y'\rangle \mid y\in F(t,x)\}$$

è misurabile rispetto a t, per la misurabilità di $F(\cdot,x)$, e continua rispetto a x. Ma allora, se D è un sottoinsieme numerabile e denso del compatto C, si ha

$$\phi(t) = \sup_{x\in D} \psi(t,x)$$

e quindi ϕ è misurabile.

Per provare iii) prendiamo una successione di funzioni misurabili c_n tali che

$$C(t) = \overline{\{c_n(t) \mid n \geq 1\}}$$

Allora si ha

$$\phi(t) \overset{def}{=} \sup\{\langle y,y'\rangle \mid y\in G(t,C(t))\} =$$

$$= \sup_{x\in C(t)} \psi(t,x) = \sup_{n\geq 1} \psi(t,c_n(t))$$

e quindi ϕ è misurabile per ogni $y' \in E^*$.

Proposizione 8. Con le ipotesi e i simboli della Proposizione 7, per ogni $x_0 \in K$ esiste $U \in C([0,T], \text{conv}(E))$ tale che

$$U(t) = x_o + \int_o^t G(s,U(s))ds \qquad \text{per } 0 \leq t \leq T,$$

essendo

$$\mathrm{conv}(E) = \{C \in E \mid \phi \neq C \text{ compatto e convesso}\}$$

dotato della distanza di Hausdorff, che lo rende uno spazio metrico completo.

Questo è uno dei risultati principali di Tolstonogov [11], con l'ipotesi (H_3'').

Per la dimostrazione definiamo la successione

$$U_n(t) = \{x_o\} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T/n,$$

$$U_n(t) = x_o + \int_o^{t-T/n} G(s,U_n(s))ds \quad \text{per } T/n \leq t \leq T.$$

Dalle proposizioni 2 e 7 segue che la definizione è ben posta e che $U_n(t) \in \mathrm{conv}\,(A)$, poiché si ha

$$G(t,C) \subset g(t)B$$

per ogni $C \in \mathrm{comp}\,(A)$.

Posto

$$V_n(t) = x_o + \int_o^t G(s,U_n(s))ds,$$

si ha per $0 \leq t \leq t' \leq T$

$$\text{(i)} \qquad V_n(t') = V_n(t) + \int_t^{t'} G(s,U_n(s))ds$$

e di qui segue

(ii) $$h[V_n(t),\ V_n(t')] \leq \int_t^{t'} g(s)ds \xrightarrow[t'-t \to 0+]{} 0$$

e quindi che la successione $n \to V_n(\cdot)$ è equicontinua in conv (A).

Si ha anche

$$V_n(t) = U_n(t) + \int_0^t G(s,x_0)ds \quad \text{per } 0 \leq t \leq T/n ,$$

$$V_n(t) = U_n(t) + \int_{t-\frac{T}{n}}^t G(s,U_n(s))ds \quad \text{per } \frac{T}{n} \leq t \leq T$$

e quindi, se poniamo $g(t) = 0$ per $-T \leq s < 0$,

(iii) $$h[V_n(t),U_n(t)] \leq \int_{t-T/n}^t g(s)ds = r_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ unif.}$$

Vogliamo provare che esiste una sottosuccessione convergente in $C([0,T],\ conv(E))$ della successione delle $U_n(\cdot)$. Questo seguirà dalla relativa compattezza della successione stessa, che proveremo per mezzo del Teorema di Ascoli-Arzelà. A causa di (ii) e (iii) le due successioni $U_n(\cdot)$ e $V_u(\cdot)$ sono equicontinue. Allora basterà provare la relativa compattezza degli insiemi

$$\{U_n(t) | n \geq 1\} \ ,\ \{V_u(t) | u \geq 1\} \subset conv(A)$$

per $0 \leq t \leq T$.

Per questo ci serve il seguente

Lemma 3. Sia $\emptyset \neq C \subset comp(E)$ e sia $H(C)$ la sua misura di non compattezza secondo Hausdorff; allora si ha

$$H(C) = h(\bigcup_{E \in C} \bar{E})$$

Per la dimostrazione del lemma cfr. Appendice.

Poniamo

$$h(t) = h(\bigcup_{n \geq 1} V_n(t))$$

Per il Lemma 3 si ha

$$\text{(iv)} \qquad h(t) = H(\{V_n(t))n \geq 1\})$$

e quindi per provare la relativa compattezza di $\{V_n(t)|\geq 1\}$ basterà provare che $h(t) = 0$ per $0 \leq t \leq T$.

Per ogni $m \in N$ si ha, tenendo conto di (iii),

$$H(\{V_n(t)|n \geq 1\}) = H(\{V_n(t)|n \geq m\}) \leq H(\{U_n(t)|n \geq m\}) + r_m(t) =$$

$$= H(\{U_n(t)|n \geq 1\}) + r_m(t)$$

Siccome $r_m(t) \to o$ per $m \to \infty$ (decrescendo), si può affermare che

$$\text{(v)} \qquad h(t) = H(\{U_n(t)|n \geq 1\}) = h(\bigcup_{n \geq 1} U_n(t)).$$

Da (ii) si ottiene per $0 \leq t \leq t' \leq T$

$$H(\{V_n(t')|n \geq 1\}) \leq H(\{V_n(t)|n \geq 1\}) + \int_t^{t'} g(s)ds$$

e quindi, usando (v),

$$|h(t) - h(t')| \leqq \int_t^{t'} g(s)ds.$$

Questo prova che $h(\cdot)$ è assolutamente continua.

Ora si ha, per $0 \leqq t \leqq t' \leqq T$,

$$V_n(t') = V_n(t)+\int_t^{t'} G(s,U_n(s))ds \subset V_n(t) + \int_t^{t'} \overline{\bigcup_{n\geqq 1} G(s,U_n(s))} \; ds$$

e quindi, posto

(vi) $$G_1(s) = \overline{\bigcup_{n\geqq 1} G(s,U_n(s))} \,, \quad 0 \leqq s \leqq T,$$

si ha

$$\bigcup_{n\geqq 1} V_n(t') \subset \bigcup_{n\geqq 1} V_n(t) + \int_t^{t'} G_1(s)ds$$

e la funzione G_1 è misurabile e verifica la condizione

$$G_1(s) \subset g(s)B \qquad \text{per } 0 \leqq s \leqq T.$$

Allora possiamo applicare la Proposizione 1 e ottenere, ricordando (iv)

$$h(t') \leqq h(t)+h\left(\int_t^{t'} G_1(s)ds\right) \leqq h(t) + \int_t^{t'} h(G_1(s))ds.$$

Si ha poi

$$G(s,U_n(s)) = \overline{co(F(s,U_n(s)))} \subset \overline{co(F(s, \bigcup_{n\geqq 1} U_n(s)))}$$

e quindi

$$G_1(s) \subset \overline{co(F(s, \bigcup_{n\geq 1} U_n(s)))},$$

$$h(G_1(s)) \leq h(\overline{co(\ldots.)}) =$$

$$= h(co(F(s, \bigcup_{n\geq 1} U_n(s))) = h(F(s, \bigcup_{n\geq 1} U_n(s))) \leq$$

$$\leq \omega(s,h(\bigcup_{n\geq 1} U_n(s))) = \omega(s,h(s))$$

Dunque possiamo concludere che $h(t) = 0$ per $0 \leq t \leq T$ e quindi che le successioni $\{U_n(\cdot)|n \geq 1\}$ e $\{V_n(\cdot)|n \geq 1\}$ sono relativamente compatte in $C([0,T], \text{conv }(A))$. Allora possiamo supporre che siano convergenti (eventualmente passando a una sottosuccessione) a una funzione limite $U(\cdot)$ che, a causa di (iii), deve essere la stessa per le due successioni.

Per concludere ci serve ancora il seguente

Lemma 4. Sia (M, m) uno spazio misurato completo e siano date le funzioni

$$M \ni t \to F(t),\ G(t) \subset g(t)B \subset E$$

misurabili a valori chiusi $\neq \emptyset$ con g sommabile. Allora si ha

$$h(\int_M F(t)dm, \int_M G(t)dm) \leq \int_M h(F(t), G(t))dm$$

e l'integrando a secondo membro è sommabile.

Per la dimostrazione del lemma si veda Appendice.

Si ha ora

$$h(U(t) - x_o, \int_0^t G(s,U(s))ds) \leq h(U(t)-x_o, V_n(t)-x_o) +$$

$$h(\int_0^t G(s,U_n(s)ds, \int_0^t G(s,U(s))ds) \leq$$

$$\leq h(U(t),V_n(t)) + \int_0^t h(G(s,U_n(s)), G(s,U(s)))ds$$

e il primo termine converge a 0 per $n \to \infty$. Anche l'integrando converge a 0 per $n \to \infty$, perché $G(s,\cdot)$ è continua, ed è maggiorato da $g(s)$; dunque anche il secondo termine converge a 0 per $n \to \infty$ e questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Proposizione 9. Con le indicazioni e ipotesi della Proposizione 8, poniamo

$$H = \{x \in C([0,T], E) | x(t) \in U(t) \text{ per } 0 \leq t \leq T, x \text{ è}$$

assolutamente continua e derivabile q.d.,

$$\dot{x}(t) \in G(t,U(t)) \text{ q.d.}\}.$$

Allora H è un sottoinsieme $\neq \emptyset$ convesso e compatto di $C([0,T], E)$.

Per provare che $H \neq \emptyset$ applichiamo il Teorema 1 a $x_o \in K$ e alla funzione

$$t \to G(t,U(t)) \neq \emptyset \text{ convesso compatto} \subset g(t)B \subset E.$$

Allora otteniamo una funzione $x:[0,T] \to A$ assolutamente continua e derivabile q.d. tale che

$$x(o) = x_o \ , \quad \dot{x}(t) \in G(t, U(t)) \qquad \text{q.d.}$$

Ne segue

$$x(t) = x_o + \int_0^t \dot{x}(s)ds \in x_o + \int_0^t G(s,U(s))ds = U(t)$$

e quindi $x \in H$.

E' chiaro che H è convesso.

Per provare che H è compatto, osserviamo che H è equicontinuo, poiché

$$x \in H \Rightarrow |x(t')-x(t)| \leq \int_t^{t'} |\dot{x}(s)|\,ds \leq \int_t^{t'} g(s)ds \quad \text{per } 0 \leq t \leq t' \leq T,$$

e che $\{x(t) | x \in H\} \subset U(t)$ = compatto. Dunque H è relativamente compatto, per il teorema di Ascabi-Arzelà. Resta da provare che H è chiuso. Sia

$$H \ni x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \in C([0,T], E)$$

Allora si ha

$$U(t) \ni x_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(t) \qquad \text{unif.}$$

e quindi $x(t) \in U(t)$. Si ha poi q.d.

$$\dot{x}_n(t) \in G(t,U(t)) = L(t)$$

e quindi, applicando a L la Proposizione 2, otteniamo una funzione $v \in S_L$ tale che la successione $\dot{x}_n$ è aderente a v nella topologia ivi considerata. Ne segue che si ha per ogni $y' \in E^*$

$$\langle x_n(t) - x_o, y'\rangle = \int_0^t \langle x_n'(s), y'\rangle ds$$

e il primo membro converge a $\langle x(t) - x_0, y'\rangle$, mentre il secondo è aderente a $\int_0^t \langle v(s),y'\rangle ds$.

Dunque deve essere

$$\langle x(t) - x_0, y'\rangle = \int_0^t \langle v(t),y'\rangle ds \quad , \quad \forall y' \in E^*$$

e quindi

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(s)ds,$$

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad \text{q.d.}$$

Infine dalla Proposizione 3 segue che

$$v(t) \in L(t) \quad \text{q.d.}$$

e questo prova che $x \in H$ e conclude la dimostrazione della proposizione.

<u>Dimostrazione del Teorema 3.</u> Applichiamo la Proposizione 6 con H dato dalla Proposizione 9 e con v fissata a piacere (per esempio $v(t) = x_0 \in K$ per $0 \leq t \leq T$).

Allora la funzione f verifica la condizione, per ogni $u \in H$,

$$f(u)(t) \in F(t,u(t)) \quad \text{q.d.},$$

Poniamo

$$I(u)(t) = x_0 + \int_0^t f(u)(s)ds \quad , \quad u \in H,$$

Allora si ha

$$I(u)(t) \in x_0 + \int_0^t F(s,u(s))ds \subset x_0 + \int_0^t G(s,U(s))ds = U(t),$$

$$\frac{d}{dt} I(u)(t) = f(u)(t) \in F(t, U(t)) \subset G(t,U(t)) \quad \text{q.d.}$$

e quindi $I(u) \in H$. Inoltre si ha per $u, v \in H$

$$\max_t |I(u)(t) - I(v)(t)| \leq \int_0^T |f(u)(s)-f(v)(s)|ds \xrightarrow[v \to u]{} o.$$

Siccome $H \neq \emptyset$ è compatto e convesso, per il teorema di Schauder, I ha un punto unito u che verifica le condizioni

$$u(o) = x_0 , \quad \dot{u}(t) = f(u)(t) \in F(t,u(t)) \quad \text{q.d.},$$

come si voleva.

Sotto certe ulteriori condizioni sulla funzione F considerata nel Teorema 3, si può provare che esistono soluzioni più regolari di quelle ottenute finora.

Seguendo Tolstonogov [11], diremo che la funzione $u \in C([0,T], E)$ è *soluzione regolare* della nostra inclusione differenziale se esiste la funzione

$$v: [0,T] \to E$$

limite uniforme di una successione di "funzioni a gradini" tale che

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds \quad , \quad v(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{per } 0 \leq t \leq T.$$

Filippov [6] ha introdotto la seguente nozione di funzione F *uniformemente localmente connessa*: esiste una funzione $\phi: [0, +\infty[\to [0,+\infty[$

con $\phi(r) \to 0$ per $r \to 0$, tale che per ogni $y_0, y_1 \in F(t,x)$ e per ogni (t,x), se $|y_0 - y_1| < r$, allora esiste un insieme connesso $C \subset F(t,x)$ di diametro $<\phi(r)$ che contiene y_0 e y_1.

Teorema 3'. Supponiamo che F verifichi le ipotesi del Teorema 3.

a) Se F è continua su $[0,T] \times A$, per ogni $v_0 \in F(0,x_0)$ esiste una "soluzione regolare" che verifica anche la condizione $\dot{x}(o) = v_0$.

b) Se F è uniformemente continua e uniformemente localmente connessa, per ogni $v_0 \in F(0,x_0)$ esiste una soluzione $x \in C^1([0,T], E)$ che verifica anche la condizione $\dot{x}(o) = v_0$.

c) L'affermazione che figura in b) è ancora vera se F è uniformemente continua e verifica le seguenti condizioni su $[0,T] \times A$

$$h[F(t,x), F(t,y)] \leq g(t)|x-y| \quad , \text{ con } 0 \leq g \in L^1,$$

$$h[F(t',x), F(t,x)] \leq l(t')-l(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq t' \leq T,$$

con $l(\cdot)$ crescente e continua. In questo caso si può supporre $\omega(t,r) = g(t)r$.

Osserviamo che nel caso a) può accadere che non esistano soluzioni di classe C^1. Nella Appendice è riportato un esempio dovuto a Filippov.

La dimostrazione è analoga a quella dei teoremi 3.1, 4.1 e 4.2 di [11].

3. ALTRI RISULTATI

Se F verifica le condizioni del Teorema 3, anche la funzione

$$F_c : (t,x) \to \overline{co(F(t,x))} \quad , \quad (t,x) \in [0,T] \times A,$$

verifica le stesse condizioni. Quindi per F_c valgono sia il Teorema 1 che il Teorema 3 e in particolare si ha

$$\emptyset \neq T_{F_c}(x_o) = \text{compatto in } C([0,T], E).$$

Teorema 4. Supponiamo che F verifichi le ipotesi del Teorema 3 e anche la seguente (*)

$$h[F(t,x), F(t,y)] \leq \omega(t,|x-y|)$$

per ogni $x,y \in A$. Allora, per ogni $x \in C([0,T], A)$ soluzione dell'equazione

$$\dot{x}(t) \in \overline{co(F(t,x(t)))} \qquad \text{q.d. per } 0 \leq t \leq T,$$

esiste una successione $n \to y_n \in C([0,T], A)$ di soluzioni dell'equazione

$$\dot{y}(t) \in F(t,y(t)) \qquad \text{q.d. per } 0 \leq t \leq T,$$

tale che

(*) Se $\omega(t,\cdot)$ è crescente, di qui segue $h[F(t,C)] \leq \omega(t,h(C))$.

$$y_n(o) = x_o \quad , \quad \max_t |y_n(t) - x(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} o.$$

Inoltre $T_F(x_o)$ è compatto in $C([0,T], E)$ se e solo se per ogni $x \in T_F(x_o)$ si ha

$$F(t;x(t)) = \overline{co(F(t,x(t)))} \qquad \text{q.d. per } 0 \leq t \leq T.$$

La prima affermazione del teorema è analoga al Teorema 2.2 di [13] , la seconda al Teorema 3.4 di [14]. Diamo una traccia della dimostrazione della prima affermazione. Questa si fonda sulle proposizioni che seguono.

Proposizione 10. Il Teorema 4 è vero nel caso di F indipendente da x.

Questa è la Proposizione 2.3 di [13]. Per la dimostrazione si usa il seguente

Lemma 5. Sia (M, m) uno spazio misurato con misura completa finita e priva di atomi, sia E uno spazio di Banach separabile e sia

$$M \ni t \to F(t) \neq \emptyset \text{ compatto} \subset g(t)B \subset E \quad , \quad 0 \leq g \in L^1(M),$$

una funzione misurabile. Allora si ha

$$\overline{\int_M F(t)dm} = \int_M \overline{co(F(t))}dm$$

e la funzione $t \to \overline{co(F(t))}$ è misurabile.

La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del Lemma 7 di

[3]. Tolstogonov ha dato una dimostrazione diversa del Lemma 5.

Proposizione 11. Sotto le ipotesi del Teorema 3, per ogni $x_o \in K$, $\varepsilon > 0$ e

$$v : [0,T] \to E$$

misurabile, esiste $x \in C([0,T], A)$ derivabile q.d. che verifica le condizioni (x assolutamente continua)

$$x(o) = x_o \ , \ x(t) \in U(t), \ \dot{x}(t) \in F(t,x(t)),$$

$$|\dot{x}(t) - v(t)| \leq \varepsilon + \rho(v(t) \ , \ F(t,x(t)))$$

La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del Teorema 3 (cfr. [13], Teorema 2.1).

Dimostrazione del Teorema 4. Se $x(\cdot)$ è la soluzione considerata nell'enunciato del Teorema 4, fissiamo due successioni di numeri positivi ε_n, δ_n convergenti a zero. Per la Proposizione 10 esiste $y_n \in C([0,T], A)$ tale che

$$y_n(0) = x(o) = x_o \ , \ \dot{y}_n(t) \in F(t,x(t)) \ , \ \text{q.d.},$$

$$|y_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon_n \ \text{ per } 0 \leq t \leq T.$$

Per la Proposizione 11 esiste $z_n \in C([0,T], A)$ tale che

$$z_n(o) = x_o,\ z_n(t) \in U(t),\ \dot{z}_n(t) \in F(t,z_n(t)),$$

$$|\dot{z}_n(t) - \dot{y}_n(t)| \leqq \delta_n + \rho(\dot{y}_n(t),\ F(t,z_n(t))).$$

Siccome $|\dot{z}_n(t)| \leqq g(t)$, la successione delle $z_n(\cdot)$ è equicontinua. Da questo e dal fatto che $z_n(t) \in U(t)$ = compatto segue che la successione è relativamente compatta in $C([0,T],\ E)$ e perciò possiamo supporre (eventualmente per una sottosuccessione) che sia convergente a $z \in C([0,T],E)$. Allora si ha $z(t) \in U(t) \subset A$. Posto

$$r_n(t) = |y_n(t) - z_n(t)|,$$

si ha $r_n(o) = 0$ e inoltre, se $0 \leqq t \leqq t' \leqq T$,

$$r_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} |x(t) - z(t)| = r(t),$$

$$r_n(t') \leqq r_n(t) + \int_t^{t'} |\dot{y}_n(s) - \dot{z}_n(s)|ds \leqq T\delta_n + \int_t^{t'} \rho(\dot{y}_n(s),\ F(s,z_n(s)))ds +$$

$$+ r_n(t) \leqq T\delta_n + \int_t^{t'} h[F(s,x(s)),\ F(s,z_n(s))]\,ds + r_n(t)$$

$$\leqq T\delta_n + \int_t^{t'} \omega(s,|x(s) - z_n(s)|)ds + r_n(t).$$

dalla continuità di $\omega(s,\cdot)$ e dalla maggiorazione $\omega(s,r) \leqq g_R(s)$ per $0 \leqq s \leqq R$(*), con g_R sommabile, segue, passando al limite rispetto a n,

$$r(t') \leqq \int_t^{t'} \omega(s,r(s))ds + r(t)\ ,\ r(o) = 0$$

e di qui segue, osservando che r è assolutamente continua, $r(t) = 0$ per

(*) Con $R \geqq r_n(t)$ per $0 \leqq t \leqq T$ e $n \geqq 1$.

$0 \leqq t \leqq T$ e quindi $z(\cdot) = x(\cdot)$, come si voleva.

<u>Teorema 4'</u>. Supponiamo che F verifichi le ipotesi del Teorema 4.

a) Se F è continua su $[0,1] \times A$, le soluzioni $y_n(\cdot)$ si possono supporre "regolari" e si può supporre che riesca $\dot{y}_n(o) = v_o \in F(o,x_o)$.

b) Se F è uniformemente continua e uniformemente connessa su $[0,T] \times A$, le soluzioni $y_n(\cdot)$ si possono supporre di classe C^1 e tali che $\dot{y}_n(o) = v_o \in F(o,x_o)$.

La prima affermazione del Teorema è analoga al Teorema 3.2 di [13] e la seconda al Teorema 1.1 di [14].

Concludiamo con un risultato di De Blasi-Pianigiani [5].

<u>Teorema 5</u>. Sia E uno spazio di Banach riflessivo reale e sia data la funzione continua (secondo la distanza di Hausdorff)

$$[0,T] \times A \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset \text{ convesso chiuso} \subset MB \subset \grave{E}$$

con interno $(F(t,x)) \neq \emptyset$ per ogni (t,x). Allora esiste $T' \in \,]0,T[$ tale che sull'intervallo $[0,T']$ si ha

i) $\emptyset \neq T_F(x_o)$ = chiuso in $C([0,T'], E)$,

ii) $T_{\partial F}(x_o)$ è un G_δ-sottoinsieme denso di $T_F(x_o)$.

Qui si è posto $\partial F(t,x)$ = frontiera di $F(t,x)$.

4. APPENDICE

Alcune definizioni.

La *distanza di Hausdorff* $h(A,B)$ fra i sottoinsiemi limitati e chiusi A, B dello spazio metrico X, con metrica ρ, è data da

$$h(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} \rho(x,B), \sup_{x\in B} \rho(x,A)\},$$

essendo

$$\rho(x,A) = \inf_{y\in A} \rho(x,y).$$

La funzione

$$Y \ni y \to F(y) \neq \emptyset \text{ chiuso limitato} \subset X$$

definita sullo spazio topologico Y si dice *continua* secondo la distanza di Hausdorff in $y_0 \in Y$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di y_0 tale che

$$y \in U \Rightarrow h(F(y), F(y_0)) < \varepsilon.$$

Ricordiamo anche alcune proprietà delle funzioni misurabili.

Sia (M,m) uno spazio misurato, X uno spazio metrico separabile completo e

$$M \ni t \to F(t) \neq \emptyset \text{ chiuso} \subset X.$$

Se per ogni aperto $0 \subset X$ l'insieme $F^{-1}(0) = \{t \in M | F(t) \cap 0 \neq \emptyset\}$ è misurabile, diremo che F è *misurabile* (anche quando F è a un solo valore).

Consiseriamo le affermazioni

i) F^{-1} (boreliano) = misurabile;

ii) F^{-1} (chiuso) = misurabile;

iii) F^{-1} (aperto) = misurabile;

iv) esiste una successione di funzioni $f_n: M \to X$ misurabili tale che

$$F(t) = \overline{\{f_n(t) | n \geq 1\}} \quad \text{per ogni } t \in M;$$

v) la funzione reale $t \to \rho\,(x, F(t))$ è misurabile per ogni $x \in X$;

vi) il grafico di F appartiene alla minima σ-algebra generata da $\{A \times B | M \supset A \text{ mis.}, X \supset B \text{ boreliano}\}$.

Allora si ha

i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\Leftrightarrow$ v) $\Rightarrow$ vi)

Se la misura m è completa, si ha vi) $\Rightarrow$ i) e quindi le affermazioni i)-v) sono equivalenti.

Se $F(t)$ = compatto, è equivalente a iii) anche

iii_1) $\quad F : M \xrightarrow[h]{} \text{comp}(X)$ è misurabile.

Se X è uno spazio di Banach separabile reale e se $F(t)$ = compatto e convesso, è equivalente a iii) anche

iii_2) $\quad$ la funzione reale $t \to \max\{\langle x, x'\rangle | x \in F(t)\}$ è misurabile per ogni $x' \in X$.*

Le dimostrazioni si possono trovare in [2].

Dimostrazione del Lemma 3. Poniamo

$$U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

e proviamo preliminarmente che $\mathcal{C}$ è limitato in comp(E) se e solo se U è limitato in E. Supponiamo $\mathcal{C}$ limitato e fissiamo $x_0 \in C_0 \in \mathcal{C}$. Allora si ha per ogni $x \in C \in \mathcal{C}$

$$\rho(x,C_0) \leqq h(C,C_0) \leqq \text{diam}\,(\mathcal{C}),$$

e quindi, se $\rho(x,C_0) = |x-x_0'|$ con $x_0' \in C_0$,

$$|x-x_0| \leqq |x-x_0'| + |x_0' - x_0| \leqq \text{diam}(\mathcal{C}) + \text{diam}\,(C_0).$$

Questo prova che U è limitato.

Supponiamo ora U limitato. Allora si ha per ogni $C \subset U$

$$\sup_{x \in C} \rho(x,U) = 0$$

e, se $x \in U$ e $x' \in C$ con $\rho(x,C) = |x-x'|$, si ha anche

$$\rho(x,C) = |x-x'| \leqq \text{diam}\,(U)$$

Pertanto si ha $h(C,U) \leqq \text{diam}(U)$ e quindi

$$\text{diam}(\mathcal{C}) \leqq \text{diam}(U)$$

Supponiamo ora $\mathcal{C}$ limitato e poniamo

$$r_\varepsilon = H(\mathcal{C}) + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon > 0.$$

Allora esistono $C_1 \dots, C_m \in comp(E)$ tali che

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{m} S_{r_\varepsilon}(C_i),$$

essendo $S_r(C)$ la sfera di centro C e raggio r in comp(E). Dunque per ogni $C \in \mathcal{C}$ esiste i tale che

$$h(C, C_i) \leq r_\varepsilon$$

e quindi per ogni $x \in C$ esiste $x_i \in C_i$ tale che $|x-x_i|=\rho(x,C_i)\leq r_\varepsilon$. Ne segue che

$$U \subset \bigcup_1^m C_i + r_\varepsilon B$$

e quindi, essendo $\bigcup_1^m C_i$ compatto, $h(U) \leq r_\varepsilon$ e ancora $(\varepsilon \to 0+)$ $h(U) \leq h(\mathcal{C})$.

Poniamo ora $r_\varepsilon = h(U) + \varepsilon$. Allora si ha

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + r_\varepsilon B) \qquad , \quad x_i \in U.$$

Per ogni $C \subset U$ poniamo

$$C_\varepsilon = \{x_i | C \cap (x_i + r_\varepsilon B) \neq \emptyset\},$$

$$U_\varepsilon = \{x_i | 1 \leq i \leq p\}.$$

Allora per ogni $x \in C$ esiste $x_i \in C_\varepsilon$ tale che $|x-x_i| \leq r_\varepsilon$ e quindi si ha $\rho(x,C_\varepsilon) \leq r_\varepsilon$.

Se $x_i \in C_\varepsilon$, esiste $x \in C \cap (x_i + r_\varepsilon B)$ e quindi si ha $\rho(x_i,C) \leq r_\varepsilon$.

Dunque si ha

$$h(C,C_\varepsilon) \leqq r_\varepsilon$$

e quindi

$$C \subset P(U) \subset \bigcup_{C_\varepsilon \in P(U_\varepsilon)} S_{r_\varepsilon}(C_\varepsilon).$$

Siccome $P(U_\varepsilon)$ è finito, di qui segue

$$H(C) \leqq r_\varepsilon \Longrightarrow H(C) \leqq h(U),$$

come si voleva.

Dimostrazione del Lemma 4. Proviamo che l'integrando a secondo membro è misurabile. Sia

$$F(t) = \{f_n(t) | n \geqq 1\} \ , \ G(t) = \{g_n(t) | n \geqq 1\},$$

con f_n e g_n misurabili. Allora la funzione

$$t \to \sup_{x \in F(t)} \rho(x,G(t)) = \sup_{n \geqq 1} \rho(f_n(t), G(t) =$$

$$= \sup_{n \geqq 1} \inf_{k \geqq 1} |f_n(t) - g_k(t)|$$

è misurabile e quindi anche la funzione

$$t \to h(F(t), G(t))$$

è misurabile.

Per ogni $x \in F(t)$ e $y \in G(t)$ si ha $|x-y| \leq |x|+|y| \leq 2\, g(t)$ e quindi

$$r(t) = h(F(t),\, G(t)) \leq 2g(t).$$

Dunque l'integrando è sommabile.

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$F(t) \subset G(t) + (1+\varepsilon)r(t)B$$

e quindi per ogni $f \in S_F$ e per ogni $t \in M$ esiste $y \in G(t)$ tale che

$$|f(t) - y| \leq (t+\varepsilon)r(t) = r_\varepsilon(t),$$

e di qui segue

$$L(t) = F(t) \cap (f(t) + r_\varepsilon(t)B) \neq \emptyset \quad \text{per } t \in M.$$

Siccome le funzioni f e r_ε sono misurabili, anche L è misurabile ed ha valori $\neq \emptyset$ chiusi. Sia g una selezione misurabile di L (ossia $g \in S_L$). Allora si ha

$$|f(t) - g(t)| \leq r_\varepsilon(t) \qquad \text{per } t \in M,$$

$$\rho\left(\int_M f(t)dm, \int_M G(t)dm\right) \leq \left|\int_M [f(t) - g(t)]\, dm\right| \leq$$

$$\leq \int_M r_\varepsilon(t)dm \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} \int_M r(t)dt$$

e questo è quanto basta.

<u>Esempio</u>. Poniamo

$$F(t) = \{(\cos \phi, t \operatorname{sen} \phi) \mid \frac{1}{t} \leqq \phi \leqq 2\pi + \frac{1}{t} - t\} \quad \text{per } 0 < t \leqq 1,$$

$$F(0) = \{(r,0) \mid -1 \leqq r \leqq 1\}$$

Allora F ha valori compatti in R^2 ed è continua e limitata. Per il Teorema 3', esiste una "soluzione regolare" $x(\cdot)$. Se $x(\cdot)$ fosse di classe C^1, si avrebbe

$$v(t) = \dot{x}(t) \in F(t) \qquad \text{per } 0 \leqq t \leqq 1$$

con $v(\cdot)$ continua su $[0,1]$ e ne seguirebbe

$$(\pm 1,0) \in v(]0,t]) \qquad \text{per ogni } t > 0,$$

il che è assurdo.

Questo ed altri analoghi esempi sono considerati in [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] J.P. AUBIN-A. CELLINA: Differential inclusions. Springer, 1984.

[2] C. CASTAING-M. VALADIER: Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Mathematics 580, Springer, 1977.

[3] R. DATKO: Measurability properties of set-valued mappings in a Banach space. SIAM J. Control 8,2 (1970).

[4] J.L. DAVY: Properties of the solution set of a generalized differential equation. Bull. Austral. Math. Soc. 6 (1972), 379-98.

[5] F.S. De BLASI-G. PIANIGIANI: A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces. Funkcialaj Ekv. 25 (1982), 153-62.

[6] A.F. FILIPPOV: Condizioni per l'esistenza di soluzioni per le equazioni differenziali multivoche. Differenz. Uravn. 13, 6 (1977), 1070-78.

[7] C.W. GROETSCH: Elements of applicable functional analysis. M. Dekker, New York, 1980.

[8] M. KISIELEWICZ: Multivalued differential equations in separable Banach spaces. JOTA 37, 2 (1982), 231-49.

[9] M. KISIELEWICZ: Compactness and upper semicontinuity of solution set of generalized differential equation in separable Banach space. Demonstratio Matem. 15, 3 (1982), 753-61.

[10] A. MÖNCH-F. von HARTEN: On the Cauchy problem for ordinary differential equations in Banach spaces. Arch. Math. 39 (1982), 153-60.

[11] A.A. TOLSTONOGOV: Sulle inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. Esistenza delle soluzioni. Sib. Mat. J. 22, 4 (1981).

[12] A.A. TOLSTONOGOV: Sulla struttura dell'insieme delle soluzioni delle inclusioni differenziali in uno spazio di Banach. Matem. Sbornik 118, 1(1982), 3-18.

[13] A.A. TOLSTONOGOV-J.I. CIUGUNOV: Sull'insieme delle soluzioni delle inclusioni differenziali negli spazi di Banach. I. Sib. Mat. J. 24, 6 (1983), 144-59.

[14] A.A. TOLSTONOGOV: Sull'insieme delle soluzioni delle inclusioni differenziali negli spazi di Banach. II. Sib. Mat. J. 25, 1 (1984), 159-73.